第35講　方程式と共役解

35　次の各問いに答えよ．ただし，$\sqrt{2}$ は無理数で，i は虚数単位である．

(1)　有理数係数の方程式 $x^2+ax+b=0$ が $p+q\sqrt{2}$（p と q は有理数）を解にもつとき，$p-q\sqrt{2}$ も解であることを示せ．

(2)　実数係数の方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が $p+qi$（p と q は実数）を解にもつとき，$p-qi$ も解であることを示せ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 35 講　方程式と共役解

35　a，b を実数とし，i を虚数単位，n を自然数とする．$z=a+bi$ に対し，$\overline{z}=a-bi$ と定めるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　α，β を複素数とする．$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$，$\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$ であることを示せ．

(2)　α が実数のとき，$\overline{\alpha}=\alpha$ であることを示せ．

(3)　実数係数の方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ が複素数 z を解にもつとき，$\overline{z}$ も解であることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第35講　方程式と共役解

35　次の各問いに答えよ．ただし，$\sqrt{2}$ は無理数で，i は虚数単位である．

(1)　有理数係数の方程式 $x^2+ax+b=0$ が $p+q\sqrt{2}$（p と q は有理数）を解にもつとき，$p-q\sqrt{2}$ も解であることを示せ．

(2)　実数係数の方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が $p+qi$（p と q は実数）を解にもつとき，$p-qi$ も解であることを示せ．

【答】　略

【解答】

(1)　$p+q\sqrt{2}$ が解であるので，$(p+q\sqrt{2})^2+a(p+q\sqrt{2})+b=0$

すなわち

$$(p^2+2q2+ap+b)+(2pq+aq)\sqrt{2}=0 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

ここで，a，b，p，q は有理数であるので，p^2+2q^2+ap+b と $2pq+aq$ は有理数となるが，$2pq+aq\neq 0$ を仮定すると①は $\sqrt{2}=-\dfrac{p^2+2q^2+ap+b}{2pq+aq}$ と変形できる．

このとき右辺の分母と分子は有理数であるので，右辺は有理数，左辺の $\sqrt{2}$ は無理数であるので，矛盾となる．

よって $2pq+aq=0$ このとき①より $p^2+2q^2+ap+b=0$

ここで

$$(p-q\sqrt{2})2+a(p-q\sqrt{2})+b=(p^2+2q^2+ap+b)-(2pq+aq)\sqrt{2}=0$$

となるので，$p-q\sqrt{2}$ も解となる．

(2)　$p+qi$ が解であるので，$(p+qi)^3+a(p+qi)^2+b(p+qi)+c=0$

すなわち

$$(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)+(3p^2q-q^3+2apq+bq)i=0 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

ここで，a，b，c，p，q は実数より $p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c$ と
$3p^2q-q^3+2apq+bq$ は実数となるが，②より得られる
$p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c=-(3p^2q-q^3+2apq+bq)i$ を２乗すると
$(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)^2=-(3p^2q-q^3+2apq+bq)^2$ となり，
$(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)^2\geqq 0$，$-(3p^2q-q^3+2apq+bq)^2\leqq 0$ より
$p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c=3p^2q-q^3+2apq+bq=0$ を得る．

このとき

$$\begin{aligned}&(p-qi)^3+a(p-qi)^2+b(p-qi)+c\\&=(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)-(3p^2q-q^3+2apq+bq)i=0\end{aligned}$$

より $p-qi$ も解となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第35講　方程式と共役解

35　a, b を実数とし，i を虚数単位，n を自然数とする．$z=a+bi$ に対し，$\overline{z}=a-bi$ と定めるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　α, β を複素数とする．$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$, $\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$ であることを示せ．

(2)　α が実数のとき，$\overline{\alpha}=\alpha$ であることを示せ．

(3)　実数係数の方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ が複素数 z を解にもつとき，$\overline{z}$ も解であることを示せ．

【答】　略

【解答】

(1)　a, b, c, d を実数として，$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ と定めると，$\overline{\alpha}=a-bi$, $\overline{\beta}=c-di$ である．

このとき，$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$ より $\overline{\alpha+\beta}=(a+c)-(b+d)i$ であり，

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$ より $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ が示された．

また，$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ より

$\overline{\alpha\beta}=(ac-bd)-(ad+bc)i$ であり，

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$ より $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ が示された．

最後に，$\overline{\alpha}=a-bi$ より $\overline{(\overline{\alpha})}=\overline{a-bi}=a-(-b)i=a+bi=\alpha$ である．

(2)　α が実数のとき，$\alpha=a+bi$ において $b=0$ である．

このとき，$\overline{\alpha}=\overline{a+0i}=a-0i=a+0i=\alpha$ である．

(3)　z が $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ の解であるので

$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$

よって

$$\overline{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n}=\overline{0}$$

が成り立つ．

ここで，(1)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\overline{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n}&=\overline{z^n}+\overline{a_1z^{n-1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{n-1}z}+\overline{a_n}\\&=\overline{z}^n+\overline{a_1}\,\overline{z}^{n-1}+\cdots\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z}+\overline{a_n}\end{aligned}$$

となる．

a_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ は実数より $\overline{a_j}=a_j$ となるので

$$\overline{z}^n+\overline{a_1}\,\overline{z}^{n-1}+\cdots\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z}+\overline{a_n}=\overline{z}^n+a_1\overline{z}^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n$$

となる．

また $\overline{0}=0$ より $\overline{z}^n+a_1\overline{z}^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n=0$ となる．

ゆえに，$\overline{z}$ も解であることが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。